ETI 2014/2015
INDUZIONE E RICORSIONE BEN FONDATE

VINCENZO MANTOVA

1. Relazioni ben fondate

Siano A una *classe* e E una *relazione-classe*, cioè una classe $E \subseteq A \times A$.

Definizione 1.1. Per ogni $x \in A$, l'**estensione di** x è classe $\mathrm{ext}_E(x) := \{y \in A : yEx\}$.

Definizione 1.2. Dato $X \subseteq A$, diciamo che $x \in X$ è un elemento E**-minimale** di X se $\mathrm{ext}_E(x) \cap X = \emptyset$ (cioè se non esiste $y \in X$ tale che yEx).

Definizione 1.3. (A, E) è **ben fondata** se

(1) ogni insieme $X \subseteq A$ non vuoto ha un elemento E-minimale;
(2) per ogni $x \in A$, $\mathrm{ext}_E(x)$ è un insieme.

Per separazione, il punto (2) è ridondante se A è già un insieme.

Proposizione 1.4. *Se (A, E) è ben fondata, allora ogni sotto-classe $B \subseteq A$ non vuota ha un minimo.*

Dimostrazione. Sia $x \in B$ un elemento di B. Definiamo per induzione $X_0 := B \cap \mathrm{ext}_E(x)$ e $X_{n+1} := B \cap \bigcup_{y \in X_n} \mathrm{ext}_E(y)$. Ogni X_n è un insieme. Definiamo $X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. Allora $X \subseteq B$ è un insieme, e ha un elemento E-minimale y.

Verifichiamo che y è minimale anche in B. Supponiamo per assurdo che esista $z \in B$ tale che zEy. Notiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $y \in X_n$. Allora $z \in B \cap \mathrm{ext}_E(y)$, quindi $z \in X_{n+1}$, quindi y non è E-minimale in X, una contraddizione. □

Esercizi

Esercizio 1.5. Se (A, E) è ben fondata allora E è anti-riflessiva (per ogni $x \in A$, $\neg xEx$).

Definiamo E^2 su $A \times A$ dicendo che $(x, y)E^2(z, w)$ se e solo se xEz e yEw.

Esercizio 1.6. Se (A, E) è ben fondata allora $(A \times A, E^2)$ è ben fondata.

Esercizio 1.7. $\mathrm{ext}_{E^2}(x, y) = \mathrm{ext}_E(x) \times \mathrm{ext}_E(y)$.

Date: 14 giugno 2015, v0.2.

2. Ricorsione

Teorema 2.1 (Induzione)**.** *Sia (A, E) ben fondata e sia Φ una proprietà. Supponiamo che per ogni $x \in A$, se ogni elemento di $\mathrm{ext}_E(x)$ ha la proprietà Φ, allora x ha la proprietà Φ. Allora ogni $x \in A$ ha la proprietà Φ.*

Dimostrazione. Sia $B \subseteq A$ la classe degli elementi di A con la proprietà Φ. Supponiamo per assurdo che $A \setminus B \neq \emptyset$, e sia x un elemento E-minimale di $A \setminus B$. Abbiamo $\mathrm{ext}_E(x) \cap (A \setminus B) = \emptyset$, ovvero $\mathrm{ext}_E(x) \subseteq B$. Allora Φ vale per tutti gli elementi di $\mathrm{ext}_E(x)$, quindi vale anche per x, quindi $x \in B$, assurdo. □

Teorema 2.2 (Ricorsione)**.** *Sia (A, E) ben fondata e sia $G : V \times V \to V$ una funzione-classe. Allora esiste un'unica funzione-classe $F : A \to V$ tale che*

$$F(x) = G\left(x, F_{\restriction \mathrm{ext}_E(x)}\right)$$

per ogni $x \in A$.

Dimostrazione. Definiamo $F(x) = y$ se e solo se esiste f tale che:

(1) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{ext}_E(x) \cup \{x\}$;
(2) $f(z) = G(z, f \restriction \mathrm{ext}_E(z))$ per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$;
(3) $f(x) = y$.

Ora basta applicare il teorema di induzione alla proprietà $\Phi(x)$ data da «esiste ed è unico y tale che $F(x) = y$». □

Esercizi

Esercizio 2.3. Sia (A, E) ben fondata e $C \subseteq V \times V$ una classe. Dimostrare che esiste un unico insieme $B \subseteq A$ tale che $x \in B \leftrightarrow (x, \mathrm{ext}_E(x) \cap B) \in C$. [Suggerimento: riadattare la dimostrazione del teorema di ricorsione, oppure rimpiazzare «$x \in B$» e «$x \in C$» con due funzioni $F, G : V \to \{0, 1\}$ che valgono 1 sugli elementi rispettivamente di B e C, e definire F per ricorsione.]

3. Collasso di Mostowski

Definizione 3.1. Dato (A, E) ben fondata, il **collasso transitivo** è l'immagine della funzione $\pi : A \to V$ definita per ricorsione da

$$\pi(x) := \{\pi(y) \, : \, y \in \mathrm{ext}_E(x)\}.$$

Chiamiamo π la **funzione di collasso**.

Notiamo che xEy implica $\pi(x) \in \pi(y)$, ossia π è un omomorfismo da (A, E) a $(\pi(A), \in)$.

Definizione 3.2. Siano A un classe ed E una relazione-classe su A. (A, E) si dice **estensionale** se per ogni $x, y \in A$ vale $\mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y)$ se e solo se $x = y$.

Teorema 3.3 (Collasso di Mostowski)**.** *Se (A, E) è ben fondata ed estensionale, allora la funzione di collasso π è un isomorfismo da (A, E) a $(\pi(A), \in)$.*

Dimostrazione. Lavoriamo per induzione su $(A \times A, E^2)$, che è ben fondata (vedi 1.6), e dimostriamo che «$\pi(x) = \pi(y)$ implica $x = y$», ovvero che π è iniettiva. Sia (x, y) una coppia in $A \times A$. Supponiamo che $\pi(x) = \pi(y)$. Per definizione di π, significa che

$$\{\pi(z) \, : \, z \in \mathrm{ext}_E(x)\} = \{\pi(z) \, : \, z \in \mathrm{ext}_E(y)\}.$$

Se $z \in \mathrm{ext}_E(x)$, allora esiste $z' \in \mathrm{ext}_E(y)$ tale che $\pi(z) = \pi(z')$. Dato che $(z, z')E^2(x, y)$, per ipotesi induttiva abbiamo $z = z'$, quindi $\mathrm{ext}_E(x) \subseteq \mathrm{ext}_E(y)$. Con il ragionamento simmetrico otteniamo anche $\mathrm{ext}_E(y) \subseteq \mathrm{ext}_E(x)$, quindi $\mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y)$. Dato che (A, E) è estensionale, concludiamo che $x = y$.

Allora π è iniettiva, ed è chiaramente surgettiva su $\pi(A)$. Inoltre xEy implica $\pi(x) \in \pi(y)$. Vice versa, se $\pi(x) \in \pi(y)$, allora $x \in \mathrm{ext}_E(y)$, ovvero xEy. Quindi π è un isomorfismo da (A, E) a $(\pi(A), \in)$. □

Esercizi

Esercizio 3.4. Scrivere esplicitamente la funzione G con cui viene definita la funzione π del collasso transitivo.

Esercizio 3.5. Sia (A, E) ben fondata e $\pi : A \to V$ la funzione di collasso. Allora xEy implica $\pi(x) \in \pi(y)$, e se E è transitiva allora $\pi(A)$ è una classe transitiva.

Esercizio 3.6. Costruire un insieme A transitivo tale che $\in$ su A non è una relazione transitiva.

4. Complessità della ricorsione

Teorema 4.1. *Sia (A, E) ben fondata, $G : V \times V \to V$ una funzione-classe, e $F : A \to V$ l'unica funzione-classe tale che*

$$F(x) = G\left(x, F_{\restriction \mathrm{ext}_E(x)}\right)$$

per ogni $x \in A$. Se A, E, G sono Σ_{n+1} (o Δ_{n+1}), allora F è Σ_{n+1} (o Δ_{n+1}).

Dimostrazione. Diamo due definizioni per F.

La prima è la stessa usata per dimostrare il teorema di ricorsione. Definiamo $F(x) = y$ se e solo se esiste f tale che:

- $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{ext}_E(x) \cup \{x\}$;
- $f(z) = G(z, f \restriction \mathrm{ext}_E(z))$ per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$;
- $f(x) = y$.

Tutte le operazioni utilizzate sono Δ_0: uguagliare due insiemi, calcolare il dominio di una funzione, prendere la restrizione di una funzione. Inoltre, $\mathrm{ext}_E(x)$ è Σ_{n+1}.

Se G è Δ_{n+1} diamo una seconda definizione. Diciamo $F(x) = y$ se per *ogni* f vale la seguente *implicazione*: se

- $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{ext}_E(x) \cup \{x\}$;
- $f(z) = G(z, f \restriction \mathrm{ext}_E(z))$ per ogni $z \in \mathrm{dom}(f)$;
- $f(x) = y$;

allora

- $y = G(f)$.

Nella premessa usiamo la definizione Σ_{n+1} di G, nella conclusione la definizione Π_{n+1}. Il risultato è una formula Π_{n+1}, quindi f è Δ_{n+1}. □

Esercizi

Esercizio 4.2. Se (A, E) è ben fondata e A, E sono Δ_1, qual è la complessità del collasso π?